Farey sequence and Ford circle

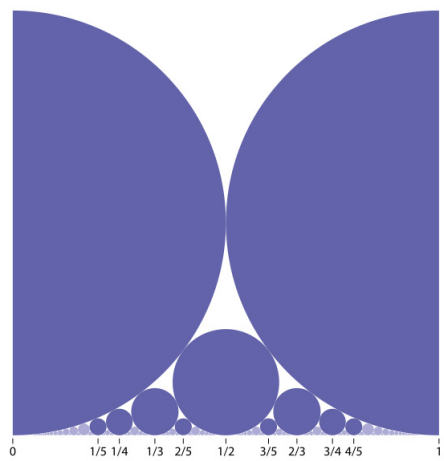


Figure 1: Ford circle

위와 같은 그림을 본 적이 있는가? 위의 그림에 있는 원들이 Ford circle 이다. 이번 글에서는 Farey sequence 와 Ford circle 에 대해서 다루어 보려고 한다.

1 Farey sequence

Farey sequence 의 정의는 다음과 같다.

Definition 1.1 (Farey sequence) *위수 n 의 Farey sequence F_n 는, 0 부터 1 까지의 기약분수 중, 분모가 n 이하인 것들을 순서대로 배열한 것이다.*

예를 들어, $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$ 이고, $F_4 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\}$ 이다.
Farey sequence 에는 여러 재미있는 성질이 있다. 그 중 하나가 다음과 같이 정의된 '쉬운 분수덧셈' 에 관한 것이다.

Definition 1.2 (쉬운 분수덧셈) *쉬운 분수덧셈 $\oplus$ 을,*

$$\frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c} = \frac{b+d}{a+c}$$

와 같이 정의하자.

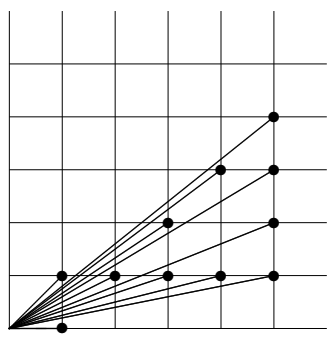
이번 글에서 증명하고자 하는 정리는 다음 정리이다.

Theorem 1.1 *F_n 안의 인접한 세 분수 $\frac{b}{a}, \frac{q}{p}, \frac{d}{c}$ 가 있으면, $\frac{q}{p} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c}$ 이다.*

즉, Farey sequence 안의 연속한 세 분수에 대하여, 중간의 수는 양 옆의 수의 '쉬운 분수덧셈'에 의해 얻어진다는 것이다. 증명을 위해 간단한 보조정리 하나를 증명하자.

Lemma 1.1 *F_n 안의 인접한 두 분수 $\frac{b}{a}$ 와 $\frac{d}{c}$ 에 대하여, $ad - bc = 1$ 이다.*

Proof.
$T(\frac{p}{q}) = (q, p)$ 로 정의되는 함수 $T : F_n \to \mathbb{Z}^2$ 를 생각하자.
점들의 집합 $T(F_n)$ 을 격자점 위에 찍고 원점과 연결해 보자. $n = 5$ 인 경우의 그림은 다음과 같다.



여기서, F_n 의 인접한 두 분수 $\frac{b}{a}$ 와 $\frac{d}{c}$ 를 생각하고, 두 점 $T(\frac{b}{a}), T(\frac{d}{c})$ 를 각각 A 와 B 라고 하자. 위 그림에서는 하나의 예, 가령 $\frac{2}{3}$ 과 $\frac{3}{4}$ 에 대응하는 두 점 $(3, 2)$ 와 $(4, 3)$ 를 생각해도 좋다.
$\frac{b}{a}$ 와 $\frac{d}{c}$ 가 인접해 있기 때문에, $\triangle OAB$ 내부에는 다른 격자점이 없다. 그러므로 Pick 의 정리[1]에서, $\triangle OAB$ 의 넓이 S 는 $\frac{1}{2}$ 이 된다.
또 주어진 좌표로 넓이를 계산하면 $S = \frac{ad-bc}{2}$ 를 얻는다.
그러므로, $ad - bc = 1$ 이 된다. ■

Lemma 1.1 에 의해서, Theorem 1.1 는 쉽게 증명된다.

Proof.
$\frac{b}{a} < \frac{q}{p} < \frac{d}{c}$ 라 하자. Lemma 1.1 에 의해서 $aq - bp = 1$, $pd - cq = 1$ 이다. 두

[1]Pick 의 정리는, 격자점 위의 점들을 꼭지점으로 가지는 다각형에서, 도형 내부의 격자점의 수가 I, 경계 위의 격자점의 수가 B 일 때, 도형의 넓이 S 는 $S = I + B/2 - 1$ 와 같이 주어진다는 것이다.

식을 빼면 $\frac{q}{p} = \frac{b+d}{a+c} = \frac{b}{a} \oplus \frac{d}{c}$ 이다. ■

2 Ford circle

Ford circle 의 정의는 다음과 같다.

Definition 2.1 (Ford circle) *$p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$ 일 때, 중심이 $(p/q, 1/2q^2)$ 이고 반지름이 $1/2q^2$ 인 원들을 Ford Circle 이라 한다. 특히 이 원을 $C[p/q]$ 라고 쓰자.*

Ford circle 들은 언제 접할까? 다음 그림을 보자.
서로 다른 두 원 A 와 B 가 있다. 원 A 를 $C[p/q]$ 라고 하고, 원 B 를 $C[P/Q]$

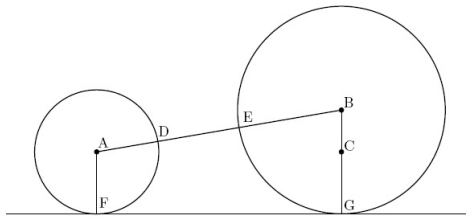


Figure 2: Ford circle

라고 하자. 그러면 피타고라스의 정리에서,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$$

인데, A 와 B 와 C 의 좌표를 대입하고 정리하면

$$|\overline{AB}|^2 = (|\overline{AD}| + |\overline{EB}|)^2 + \frac{(Pq - pQ)^2 - 1}{Q^2 q^2}$$

를 얻는다. 여기서,

i) $|Pq - pQ| > 1$ 이면, $|\overline{AB}| > |\overline{AD}| + |\overline{EB}|$ 이므로, 두 원(의 내부)은 만나지 않는다.

ii) $|Pq - pQ| = 1$ 이면, $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| + |\overline{EB}|$ 이므로, 두 원은 외접하게 된다.

iii) $|Pq - pQ| < 1$ 이면, $p, P, q, Q \in \mathbb{Z}$ 이므로 $Pq - pQ = 0$, $\therefore \frac{p}{q} = \frac{P}{Q}$ 인데, 이것은 가정에 모순.

여기에서, 우리는 두 Ford circle 이 내부를 공유하는 경우는 없음을 알 수 있다. 서로 다른 두 Ford circle 이 접하기 위한 조건 $|Pq - pQ| = 1$ 은, 두 분수 $\frac{p}{q}$와 $\frac{P}{Q}$ 가 Farey sequence 의 두 인접한 수일 조건과 동일하다. 즉, Farey sequence

의 인접한 두 분수 $r_1/s_1, r_2/s_2$ 가 있으면, $C[r_1/s_1]$ 과 $C[r_2/s_2]$ 는 접하게 된다. 그렇다면, 그 역은 성립할까? 즉, $C[r_1/s_1]$ 과 $C[r_2/s_2]$ 가 접한다면, r_1/s_1 과 r_2/s_2 는 Farey sequnece 에서 인접해 있을까?
이것은 Lemma 1.1 의 역과 관련이 있다. 즉, Lemma 1.1 의 역이 참이라면, *접하는 두 Ford circle 의 중심의 x 좌표는 어떤 Farey sequence 에서 인접해 있게 된다.* 결론부터 말하자면, Lemma 1.1 의 역은 성립한다.(증명은 분모에 대한 강귀납법으로 가능하다.)
여기에서 우리는 다시, Farey sequence 에서 성립했던 쉬운 덧셈에 대한 정리 (Theorem 1.1)를 떠올릴 수 있다. 즉, 접하는 두 Ford circle $C[p_1/q_1]$, $C[p_2/q_2]$ 이 있으면, 적당한 위수의 Farey sequence 에서 $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}, \frac{p_2}{q_2}$ 는 인접한 세 Farey 쌍이 되고, 따라서 $C[p_1/q_1]$ 과 $C[p_2/q_2]$ 가 접한다면 $C[(p_1+p_2)/(q_1+q_2)]$ 는 두 원에 공통으로 접한다는 사실을 알 수 있다.

앞서의 내용과 큰 관련은 없지만, Ford circle 의 넓이를 구해 보는 것으로 글을 마칠까 한다.
$\left\{C[p/q] | 0 \leq \frac{p}{q} < 1\right\}$ 에 포함되어 있는 Ford circle 들의 넓이의 합을 구하는 것이 목적이다.
Ford circle 의 정의에서, 구하는 넓이 A 는 다음과 같다는 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{q\geq 1} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1\leq p<q}} \pi \left(\frac{1}{2q^2}\right)^2 \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{q\geq 1} \frac{1}{q^4} \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ 1\leq p<q}} 1 \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{q\geq 1} \frac{\varphi(q)}{q^4} \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{\zeta(3)}{\zeta(4)} \\ &= \frac{45}{2\pi^3} \zeta(3) \end{aligned}$$

$\varphi(n)$ 는 오일러의 totient 함수이고, $\zeta(s)$ 는 리만 제타 함수 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 이다.
위 증명에서, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ 를 사용하였다. 이 식은 아래와 같이 증명한다.

$$
\begin{aligned}
\zeta(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} &= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{(mn)^s} \\
&= \sum_{h=1}\left(\big(\sum_{mn=h}\varphi(n)\big)\cdot\frac{1}{h^s}\right) \\
&= \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{d|h}\big(\varphi(d)\big)\frac{1}{h^s} \\
&= \sum_{h=1}^{\infty}\frac{h}{h^s} = \zeta(s-1)
\end{aligned}
$$

그러므로,

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}
$$

이다.